INSTITUT DE STATISTIQUE
DE L'UNIVERSITE DE PARIS

CONCOURS D'ENTRÉE 2003

Epréuve de Mathématique II

Durée 3 heures

Définitions et notations

⋆ Etant donné une partie A de $[0,1]$, on note χ_A la fonction caractéristique de A définie par :

$$\chi_A : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

⋆ On note :

- B l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ bornées,
- $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ continues,
- $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ continues à droite en tout point de $[0,1[$ et admettant une limite à gauche en tout point de $]0,1]$,

⋆ Étant donné une fonction f appartenant à $\mathcal{B}$, on définit

$$\|f\| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

⋆ Étant donné une fonction f appartenant à $\mathcal{D}$, on note $J(f)$ l'ensemble des points de $[0,1]$ où f est discontinue.

Partie I. Inclusions *et structure.*

I.A. *Espace $\mathcal{C}$.*

I.A.1. Énoncer les propriétés à vérifier pour démontrer que $(\mathcal{B}, \|\ \|)$ est un espace vectoriel normé (on ne demande pas la vérification de ces propriétés).

I.A.2. Montrer que $(\mathcal{B}, \|\ \|)$ est complet,

I.A.3. En déduire que $(\mathcal{C}, \|\ \|)$ est un espace de Banach.

I.B. *Espace* 'D.

I.B.1. En utilisant la compacité de $[0,1]$, montrer que $\mathbf{D} \subset \mathcal{B}$.

I.B.2. Montrer que $\mathcal{D}$ est sous–espace vectoriel fermé de $(\mathcal{B}, \| \|)$

Partie *II.* *Exemples* de fonctions dans $\mathcal{D}$.

II.A. *Exemples de fonctions caractéristiques appartenant a* $\mathcal{D}$

II.A.1. Montrer que :

$$\forall \alpha \in [0,1],\ \chi_{[\alpha,1]} \in \mathcal{D}$$

II.A.2. En déduire que :

$$\forall (\alpha,\beta) \in [0,1]^2,\ \chi_{[\alpha,\beta[} \in \mathcal{D}.$$

II.B. Construire une fonction g $\in \mathcal{D}$ telle que

$$J(g) = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}^* \right\}.$$

II.C. Étant donné trois réels α, β et y, on définit la fonction $h_{\alpha,\beta,\gamma}$ sur $[0,1]$ par :

$$h_{\alpha,\beta,\gamma}(x) = \begin{cases} \text{Q} & \text{si} \quad x = 0, \\ \dfrac{\cos(x(1-x)) - \sqrt{1-x+x^2}}{(e^x-1)(1-x)^\beta} & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ \gamma & si \quad x = 1. \end{cases}$$

II.C.1. Donner un équivalent en 0^+ et en 1^- de $h_{\alpha,\beta,\gamma}(x)$.

II.C.2. Pour quelles valeurs de (α,β,γ) a-t-on $h_{\alpha,\beta,\gamma} \in \mathcal{D}$?

II.D. Pour tout X dans $[0,1]$, on note

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n x)}{\cdot}.$$

II.D.1. Soit s la fonction de **R** dans **R**, 2π-périodique définie par :

$$\forall x \in [0.2\pi[,\quad s(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

Calculer la série de Fourier de s.

II.D.2. Montrer que l'expression de $S(x)$ donnée ci-dessus permet de définir une application S de $[0.1]$ dans **R**. Cette application S est-elle dans 'D ?

II.E. Soit r une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.
Pour tout x dans $[0,1]$, on note

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \chi_{[r(k),1]}(x).$$

II.E.1. Montrer que l'expression de $F(x)$ donnée ci-dessus permet de définir une application F de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$.

II.E.2. Montrer que F est dans $\mathcal{D}$ et expliciter $J(F)$.

II.E.3. La fonction F est-elle continue par morceaux ?

Partie III. Convergence au *sens de* Skorokhod.

- On appelle changement de temps toute application λ de $[0,1]$ dans $[0,1]$, continue strictement croissante telle que $\lambda(0) = 0$ et $\lambda(1) = 1$.
- On note $\mathbf{A}$ l'ensemble des changements de temps.
- On note Id l'application identique de $[0,1]$ dans $[0,1]$.
- Étant donné une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}$ et f un élément de $\mathcal{D}$, on dit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f au sens de Skorokhod s'il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de changements de temps telle que

$$\begin{cases} (i) & \lim\limits_{n\to+\infty} \|\lambda_n - \mathrm{Id}\| = 0, \\ (ii) & \lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n \circ \lambda_n - f\| = 0. \end{cases}$$

Dans ce cas, on note

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{Sk}} f.$$

III.A. *Propriétés des changements de temps.*

III.A.1. Montrer que $(\Lambda, \circ)$ est un groupe.

III.A.2. Est-ce que $\mathbf{A}$ est une partie fermée de $(\mathcal{B}, \|\ \|)$?

III.A.3. Soit f dans $\mathcal{D}$ et λ dans $\mathbf{A}$, montrer que :

$$\|f \circ \lambda\| = \|f\|.$$

III.A.4. Soit f et g dans $\mathcal{B}$ et λ dans $\mathbf{A}$, montrer que :

$$\|f - g\| \leq \|f \circ \lambda - g\| + \|g \circ \lambda - g\|.$$

III.B. *Premières propriétés.*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}$ et f un élément de $\mathcal{D}$.

III.B.1. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f, alors $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers f au sens de Skorokhod.

III.B.2. Soit x un point de $[0,1]$ où f est continue. Montrer que

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{Sk}} f \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

Indication : on pourra considérer $x_n = \lambda_n^{-1}(x)$

III.C. *Premiers exemples.*

III.C.1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $]0,1[$ convergeant vers $a \in]0,1[$, montrer que :

$$\chi_{[a_n,1]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \chi_{[a,1]}.$$

Indication : on pourra considérer une suite de changements de temps affines par morceaux.

III.C.2. Soit $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite strictement croissante d'éléments de $]0,1[$ convergeant vers 1, est-ce que :

$$\chi_{[b_n,1]} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{Sk}} \chi_{\{1\}} \ ?$$

III.D. *Lien avec d'autres types de convergence.*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}$ et f un élément de $\mathcal{D}$.

III.D.1. Est-ce que la convergence au sens de Skorokhod implique la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vers f ?

III.D.2. Est-ce que la convergence au sens de Skorokhod implique la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vers f ?

III.D.3. Dans cette question seulement, on suppose de plus que $f \in \mathcal{C}$. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers f au sens de Skorokhod, alors $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f.
Indication : on pourra utiliser III.A.4.

III.E. *Propriétés de séparation.*

III.E.1. Trouver deux suites d'éléments de $\mathcal{D}$ convergentes au sens de Skorokhod dont la somme diverge au sens de Skorokhod.

III.E.2. En déduire qu'il n'existe aucune norme N sur $\mathcal{D}$ telle que

$$\forall (f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{D}^{\mathbf{N}},\ \forall f \in \mathcal{D},\ f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{Sk}} f \iff \lim_{n\to+\infty} N(f_n - f) = 0.$$

III.E.3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}$ qui converge au sens de Skorokhod vers $f_1 \in \mathcal{D}$ et vers $f_2 \in \mathcal{D}$. Montrer que $f_1 = f_2$.

Fin du sujet.